ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN MẠNH ĐỨC

VẬN DỤNG PHÉP ĐẾM NÂNG CAO VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN MẠNH ĐỨC

VẬN DỤNG PHÉP ĐẾM NÂNG CAO VÀO GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 60.46.01.13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

PGS.TS TRỊNH THANH HẢI

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Mở đầu

Trong chương trình toán ở trường THPT nói chung, nội dung dành cho học sinh giỏi nói riêng, các "bài toán đếm" luôn thu hút được sự quan tâm của học sinh bởi tính thực tiễn đa dạng, phong phú của nó và dạng bài tập này cũng thường có mặt trong các đề thi học sinh giỏi hàng năm các cấp.

Tuy nhiên việc giải các bài toán dạng này thường là khó đối với nhiều học sinh, lý do chính là học sinh chưa nắm được và biết cách vận dụng các phép đếm vào từng bài toán cụ thể.

Cũng đã có một số tác giả đã đưa ra một vài dạng bài tập liên quan đến hướng nghiên cứu của luận văn như: Văn Phú Quốc [7], Nguyễn Văn Nho [8]... Tuy nhiên các tài liệu này chưa phân nhóm, đưa ra một cách tường minh, rõ ràng các ý tưởng, phương pháp vận dụng phép đếm vào giải các bài toán.

Với mục đích tìm hiểu, sưu tầm một hệ thống các bài toán mà lời giải của nó có vận dụng các phép đếm để sử dụng các bài tập này vào việc ôn tập, bồi dưỡng cho học sinh khá, giỏi ở trường THPT, chúng tôi chọn đề tài: "Vận dụng phép đếm nâng cao vào giải một số bài toán thi học sinh giỏi". Nhiệm vụ cụ thể của luận văn là:

(1). Hệ thống một số tính chất cơ bản trong chương trình toán phổ thông để khởi đầu cho việc tìm hiểu các phép đếm nâng cao.

(2). Giới thiệu một số phép đếm nâng cao và minh họa việc vận dụng chúng vào giải một số bài tập, đề thi học sinh giỏi.

Trong quá trình thực hiện đề tài, luận văn đã tham khảo trích dẫn một số bài tập trong các tài liệu tham khảo đồng thời cũng cố gắng đưa ra lời giải chi tiết hơn cho một số ví dụ mà trong các tài liệu tham khảo mới chỉ đưa ra hướng giải hoặc lời giải vắn tắt.

Vì trong SGK, chương trình toán THPT không dạy những phép đếm này một cách tường minh; nên để phân biệt chúng tôi gọi tạm là

"Phép đếm nâng cao".

Để hoàn chỉnh luận văn, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn, chỉ bảo tận tình của PGS. TS. Trịnh Thanh Hải (Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên), các thầy cô khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên và các thầy cô giảng dạy lớp cao học toán K9A. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến các thầy cô và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đến thầy cô.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới Lãnh đạo trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – Tin, PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy cùng toàn thể các thầy cô trong trường đã hướng dẫn và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Lí thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán học rời rạc chuyên nghiên cứu sự phân bố các phần tử vào các tập hợp. Thông thường các phần tử này là hữu hạn và việc phân bố chúng phải thỏa mãn những điều kiện nhất định nào đó, tùy theo yêu cầu của bài toán cần nghiên cứu. Mỗi cách phân bố như vậy gọi là một cấu hình tổ hợp. Chủ đề này đã được nghiên cứu từ thế kỉ XVII, khi những vấn đề về tổ hợp được nêu ra trong những công trình nghiên cứu các trò chơi may rủi. Liệt kê, đếm các đối tượng có những tính chất nào đó là một phần quan trọng của lí thuyết tổ hợp. Đếm các đối tượng để giải nhiều bài toán khác nhau.

1.1 Nguyên lý cộng

Đây là nguyên lý cơ bản của tổ hợp, được vận dụng rộng rãi vào giải quyết các bài toán đếm. Nếu A và B là hai tập hợp không giao nhau thì $|A \cup B| = |A| + |B|$.

1.1.1 Định nghĩa

Cho $A_i, i = \overline{1, n}$ là các tập rời nhau. Khi đó

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \bigcup_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Một trường hợp riêng của nguyên lý cộng: Nếu A là một tính chất cho trên tập X

$$|A| = |X| - |A^c|$$

thì
$$|A| = |X| - |\bar{A}|.$$

1.1.2 Ví dụ

Ví dụ 1.1.1 Một đoàn vận động viên gồm hai môn bắn súng và bơi được cử đi thi đấu ở nước ngoài. Nam có 10 người. Số vận động viên thi bắn súng (kể cả nam và và nữ) là 14. Số nữ vận động viên thi bơi bằng số nam vận động viên thi bắn súng. Hỏi đoàn có bao nhiêu người?
Lời giải. Chia đoàn thành 2 lớp: nam và nữ. Lớp nữ lại được chia 2: thi bắn súng và thi bơi. Thay số nữ thi bơi bằng số nam thi bắn súng (2 số này bằng nhau theo đầu bài), ta được số nữ bằng tổng số cầu thủ thi bắn súng. Từ đó, theo nguyên lý cộng, toàn đoàn có $10 + 14 = 24$ người.

Ví dụ 1.1.2 Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân có đúng 3 ký tự là 9?
Lời giải. Xâu có thể chứa
 ký tự khác 9 ở vị trí thứ nhất
 hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ hai
 hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ ba
 hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ tư
ta có thể sử dụng quy tắc cộng. Đối với mỗi trường hợp, có 9 khả năng chọn ký tự khác với 9 (bất kể chữ số khác 9 nào trong 9 chữ số $0, 1, \dots, 8$).
Vậy đáp số là: $9 + 9 + 9 + 9 = 36$.

1.2 Nguyên lý nhân

1.2.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1.2.1 *Tích Descartes của hai tập hợp* A, B *ký hiệu bởi* $A \times B$ *là tập hợp tất cả các cặp thứ tự* (a, b) *với* $a \in A$, $b \in B$.

Định nghĩa 1.2.2 *Nếu* A *và* B *là hai tập hợp hữu hạn thì* $A \times B$ *cũng hữu hạn và ta có*
$$|A \times B| = |A|.|B|.$$

Định nghĩa về tích Descartes và nguyên lý nhân trên đây có thể mở rộng cho nhiều tập hợp. Nguyên lý nhân có thể phát biểu một cách khác như sau:

Nếu một quá trình có thể được thực hiện qua hai công đoạn: công đoạn 1 có n_1 cách thực hiện, công đoạn 2 (sau khi thực hiện công đoạn 1) có n_2 cách thực hiện. Khi đó có $n_1.n_2$ cách thực hiện quá trình đó.
Tổng quát: cho n tập hợp $A_i,\ i=\overline{1,n},\ n\geq 2$. Khi đó:

$$\left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

1.2.2 Ví dụ

Ví dụ 1.2.3 Hỏi có bao nhiêu lá cờ gồm 3 vạch mầu, mầu của mỗi vạch lấy từ 3 mầu xanh, đỏ, trắng sao cho:

a) Không có hai vạch liên tiếp nào cùng mầu;

b) Không có hai vạch nào cùng mầu.

Lời giải. Đánh số các vạch của lá cờ bởi $1, 2, 3$ từ trên xuống.

a) Mầu của vạch 1 có 3 cách chọn.
Sau khi mầu của vạch 1 đã chọn, mầu của vạch 2 có 2 cách chọn không được chọn lại mầu của vạch 1).
Sau khi mầu của vạch $1, 2$ đã chọn, mầu của vạch 3 có 2 cách chọn (không được chọn lại mầu của vạch 2).
Theo nguyên lý nhân, số lá cờ cần đếm là: $3.2.2 = 12$.

b) Mầu của vạch 1 có 3 cách chọn.
Sau khi mầu của vạch 1 đã chọn, mầu của vạch 2 có 2 cách chọn (không được chọn lại mầu của vạch 1).
Sau khi mầu của vạch $1, 2$ đã chọn, mầu của vạch 3 có 1 cách chọn (không được chọn lại mầu của vạch 1 và 2).
Theo nguyên lý nhân, số lá cờ cần đếm là: $3.2.1 = 6$.

Ví dụ 1.2.4 Cho n là một số nguyên dương. Xét $A = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}\dots P_n^{\alpha_n}$ với $P_1, P_2, \dots, P_n$ là các số nguyên tố phân biệt. Hỏi A có bao nhiêu ước số dương phân biệt?
Lời giải. Ký hiệu $A_i = \{1, 2, 3, \dots, \alpha_i\},\ i=\overline{1,n}$. Mỗi ước số a của A có dạng: $a = P_1^{\beta_1}.P_2^{\beta_2}\dots P_n^{\beta_n}$ trong đó $\beta_i \in A_i$, do đó số ước số của A là số phần tử của tích Đề các $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Áp dụng nguyên lý nhân ta có số các ước của A là:

$$A = |A_1|.|A_2|\dots|A_n| = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_n+1).$$

1.3 Nguyên lý bù trừ, thêm bớt

1.3.1 Định nghĩa

Cho X là một tập hữu hạn và $A \subset X$. Gọi $\bar{A} = X/A$. Khi đó ta có: $|\bar{A}| = |X| - |A|$.

Nhận xét 1.3.1 *Cho* A_1, A_2 *là hai tập hữu hạn, khi đó* $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
Từ đó với ba tập hợp hữu hạn A_1, A_2, A_3, ta có:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| \\ &\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

và bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, \ldots A_k$ ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - ... + (-1)^{k-1} N_k$$

trong đó N_m $(1 \leq m \leq k)$ là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là

$$N_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_m}|.$$

Bây giờ ta đồng nhất tập A_m $(1 \leq m \leq k)$ với tính chất A_m cho trên tập hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào. Gọi $\bar{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U. Ta có:

$$\bar{N} = N - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - \cdots + (-1)^k N_k$$

trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho. Công thức này được gọi là **nguyên lý bù trừ**. Nó cho phép tính $\bar{N}$ qua các N_m trong trường hợp các số này dễ tính toán hơn.
Tổng quát: cho n tập hợp A_i, $i = \overline{1, n}$ $(n \geq 2)$. Khi đó:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 < \cdots \leq i_k \leq n} \left| \bigcap_{m=1}^{k} A_{i_m} \right|.$$